



Θέματα

1. (α) Να δείξετε ότι το μήκος της διαδρομής, $S(t)$, που διανύθηκε από υλικό σημείο το οποίο ξεκινά να κινείται τη χρονική στιγμή t_0 , δίνεται από την σχέση,

$$S(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} dt.$$

- (β) Υλικό σημείο μάζας m κινείται στο xy -επίπεδο με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \alpha \cos(\omega t)\vec{i} + \beta \sin(\omega t)\vec{j}$, με α, β, ω , σταθερές. Τι τροχιά εκτελεί το υλικό σημείο; Να σχεδιάσετε τη δύναμη που δρα στο υλικό σημείο.

2. (α) Ναδειχθεί ότι αν $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ είναι διατηρητική τότε, $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, σε κλειστή καμπύλη c , επιφάνειας S .

- (β) Για τη δύναμη $\vec{F} = -\frac{y}{r^2}\vec{i} + \frac{x}{r^2}\vec{j}$, με $r^2 = x^2 + y^2$ να υπολογιστεί το έργο της στο χωρίο $R: h^2 \leq r^2 \leq 1$ με $0 < h < 1$.

3. (α) Να δώσετε τον ορισμό του κέντρου μάζας, \vec{r}_{KM} , για την περίπτωση (i) του συστήματος N υλικών σημείων και (ii) για την περίπτωση του συνεχούς συστήματος.

- (β) Να βρεθεί η μάζα, m , και το κέντρο μάζας του στερεού που περιρίζεται από τις επιφάνειες,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 \quad \text{και} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \beta^2, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

Η πυκνότητα του στερεού είναι σταθερή, $\rho = c$, c : σταθερά.

4. Έστω ότι τό υλικό σημείο (Υ.Σ.) έχει εξίσωση κίνησης την $\ddot{x} + \sin x = 0$.

- (α) Να βρεθεί η Χαμιλτονιανή, H , της κίνησης του Υ.Σ.

- (β) Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και να σχεδιαστεί ο χώρος των φάσεων με την βοήθεια της Χαμιλτονιανής, H .